I Sommes et produits

I.1 Cas général

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Par combinaisons linéaires, on obtient :

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

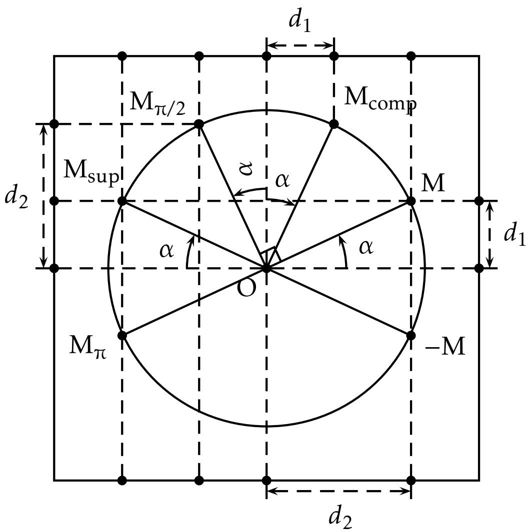
En posant $\sigma = (\alpha+\beta)$ et $\delta = (\alpha-\beta)$ (et donc $\alpha = (\sigma+\delta)/2$ et $\beta = (\sigma-\delta)/2$) on obtient :

$$\sin\sigma + \sin\delta = 2\sin\left(\frac{\sigma+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma-\delta}{2}\right) \qquad \cos\sigma + \cos\delta = 2\cos\left(\frac{\sigma+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\sigma-\delta}{2}\right)$$
$$\cos\sigma - \cos\delta = -2\sin\left(\frac{\sigma+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\sigma-\delta}{2}\right)$$

I.2 Angles complémentaires et supplémentaires

Les cas particuliers des angles sommes et différences avec $\pi/2$ et π sont très importants et se retrouvent très facilement en considérant le cercle trigonométrique, de rayon unité (OM = 1). En effet, tous les cos et sin des angles relatifs à un angle particulier s'expriment en fonction des distances d_1 et d_2 du schéma, comme détaillé dans la table 1.
On retiendra facilement ces relations en se souvenant que :

$\alpha \to -\alpha$	$\Leftrightarrow$	oppose sin, conserve cos
$\alpha \to \pi/2-\alpha$	$\Leftrightarrow$	échange sin et cos
$\alpha \to \alpha+\pi/2$	$\Leftrightarrow$	dérive sin et cos
$\alpha \to \pi-\alpha$	$\Leftrightarrow$	oppose cos, conserve sin
$\alpha \to \pi+\alpha$	$\Leftrightarrow$	oppose cos et sin



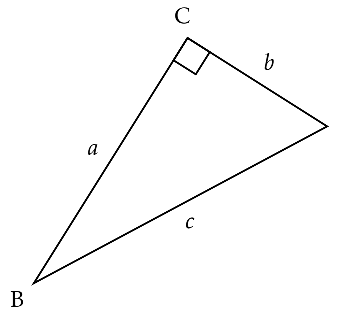
point	angle	cos	sin
M	α	$\cos\alpha = d_2$	$\sin\alpha = d_1$
−M	$-\alpha$	$\cos\alpha = d_2$	$\sin\alpha = -d_1 = -\sin\alpha$
M_{comp}	$\pi/2-\alpha$	$\cos(\pi/2-\alpha) = d_1 = \sin\alpha$	$\sin(\pi/2-\alpha) = d_2 = \cos\alpha$
$M_{\pi/2}$	$\pi/2+\alpha$	$\cos(\pi/2+\alpha) = -d_1 = -\sin\alpha$	$\sin(\pi/2-\alpha) = d_2 = \cos\alpha$
M_{sup}	$\pi-\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -d_2 = -\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = d_1 = \sin\alpha$
M_π	$\pi+\alpha$	$\cos(\pi+\alpha) = -d_2 = -\cos\alpha$	$\sin(\pi+\alpha) = -d_1 = -\sin\alpha$

Table 1

II Relations des triangles

II.1 Triangle rectangle : théorème de Pythagore

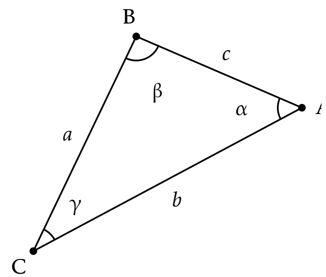
On a : $a^2 + b^2 = c^2$.



II.2 Triangle quelconque

Théorème d'Al-Kashi On a[a] : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. On a également la même égalité pour le côté a (resp. b) avec l'angle α (resp β).

Relation des sinus On a : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, avec R le rayon du cercle circonscrit au triangle. En physique, on n'utilisera que les égalités entre les longueurs des côtés et les sinus.



a. On peut remarquer que le théorème de Pythagore en est un cas particulier pour $\gamma = \pi/2$.

III Fonctions réciproques

La fonction sin (resp. cos et tan) est bijective de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $[-1;1]$ (resp. $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$ pour cos et de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $]-\infty;+\infty[$ pour tan), *ie* à chaque point de l'ensemble de départ correspond un et un seul point de l'espace d'arrivée, et pour chaque point de l'ensemble d'arrivée, il existe un et un seul point de l'ensemble de départ dont il est l'image. On peut donc définir, pour chacune des fonctions sin, cos et tan la fonction *réciproque*, nommée respectivement arcsin, arccos et arctan telle que :

$$\forall x \in [-1;1] : \begin{cases} \sin(\arcsin x) &= x \\ \cos(\arccos x) &= x \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall \alpha \in]-\pi/2;\pi/2[: \arcsin(\sin\alpha) &= \alpha \\ \forall \alpha \in [0;\pi] : \arccos(\cos\alpha) &= \alpha \end{cases} \tag{1}$$

$$\forall x \in]-\infty;\infty[: \tan(\arctan x) = x \qquad \forall \alpha \in]-\pi/2;\pi/2[: \arctan(\tan\alpha) = \alpha \tag{2}$$

D'autres formules, moins indispensables :

$$\forall x \in [-1;1] \qquad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \qquad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2} \tag{3}$$

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \tag{4}$$

$$\forall x \in]-\infty;\infty[\qquad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

IV Dérivation et intégration

On a :

$$\frac{\mathrm{d}\cos\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = -\sin\alpha \qquad \frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \cos\alpha \qquad \frac{\mathrm{d}\tan\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = 1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cotan}\alpha}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{-1}{\sin^2\alpha} \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}\arccos x}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}\arctan x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arccotan}x}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{1+x^2} \tag{8}$$