MP*1

Exercices de révision

Ce document est conçu pour vous rappeler l'essentiel du programme de MPSI, en mettant l'accent sur la connaissance du cours et la mise en pratique des notions. Travailler sérieusement cette liste devrait vous faciliter considérablement l'année de MP*. Il vous est demandé de rédiger les solutions pour la rentrée. Pour tirer un parti optimal de ce travail, il faudrait garder en mémoire certains des résultats établis ici (repérés par le symbole *).

Afin de garder à cette sélection déjà longue un volume raisonnable, seuls les chapitres les plus centraux sont abordés : analyse réelle, polynômes, algèbre linéaire et euclidienne, probabilités. Pour chacun de ces chapitres, on a rappelé dans les points essentiels du cours de première année. Acquérir une vraie compréhension des objets demande de maîtriser ces résultats et leurs preuves.

Pour finir, deux points importants.

a. Le rôle de la technique. En Mathématiques comme en Physique, le calcul joue, bien au delà des concours, un rôle central. On vous demandera surtout d'effectuer rapidement des calculs simples. Pour se lancer dans un calcul et le conduire efficacement, il faut un peu de confiance en soi et une bonne maîtrise de gestes de base. On ne peut acquérir l'une et l'autre que par la pratique : vous trouverez donc ci-dessous un assez grand nombre d'exercices techniques.

En particulier, le calcul asymptotique joue un rôle central dans le programme de seconde année. Plus largement, une bonne maîtrise des techniques asymptotiques est indispensable en Analyse. Arriver en seconde année avec de bons automatismes sur le sujet permet de limiter les gammes ennuyeuses et d'appliquer le calcul asymptotique à des problèmes intéressants.

b. Le rôle du dessin. La représentation géométrique est décisive dans de nombreuses situations mathématiques. Il est essentiel de la travailler ; il vous est donc suggéré de dessiner dès que le contexte s'y prête.

1 Nombres complexes

Outre les deux types de représentation des nombres complexes (partie réelle et imaginaire, module et argument), il faut connaître :

- la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré ;

- les transformations de $1+e^{it}$ et $1-e^{it}$ par « l'arc moitié » ;

- les techniques de calcul de sommes trigonométriques, fondées sur le « passage dans $\mathbb{C}$ » ;

- les racines n-ièmes de 1 et la résolution de de l'équation $z^n = a$;

- l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité ;

- l'interprétation géométrique de $\frac{c-a}{b-a}$.

1. *Suites arithmético-géométriques*
   La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = ax_n + b.$$
   Calculer x_n en fonction de x_0, a, b, n.
2. * Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les sommes
   $$C(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad S(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$
3. * Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que, pour tout polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$:
   $$P(0) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in U_n} P(\omega).$$
   b) Montrer que
   $$|P(0)| \leq \max\{|P(\omega)| \; ; \; \omega \in U_n\}$$
   et caractériser le cas d'égalité.
4. a) Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$, $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Indiquer un polynôme Q de $\mathbb{Q}[X]$ de degré $n-1$ tel que $Q(\omega) = 0$.
   b) Soit $x = 2\cos(2\pi/5)$. En utilisant a) et en remarquant que
   $$x = \omega + 1/\omega, \qquad \text{avec} \quad \omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right),$$
   trouver une équation de degré 2 à coefficients rationnels satisfaite par x, puis calculer x.
5. Soit $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer que les complexes a, b, c sont, dans cet ordre, les sommets d'un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si
   $$a + bj + cj^2 = 0.$$
   On pourra écrire que c est l'image de b par une rotation convenable.

2 Asymptotique

On a dit dans l'introduction le rôle central du calcul asymptotique. Les exercices suivants sont donc parmi les plus importants de ce document. Les douze premiers sont des applications immédiates du cours et devraient être traités très rapidement (une heure pour l'ensemble).

Il est essentiel de bien connaître les développements limités usuels et de savoir mener rapidement un calcul simple de développement limité. A cet effet, voici quelques points importants :

- prévoir a priori l'ordre du développement, pour limiter les calculs,

- factoriser les termes prépondérants,

- multiplier si besoin est les calculs intermédiaires,

- ne pas oublier que 1^∞ est une forme tout aussi indéterminée que $0 \times \infty$,

- se souvenir que les équivalents ne passent pas à l'exponentielle, et plus précisément, que :

$$e^{a_n} \sim e^{b_n} \quad \Leftrightarrow \quad a_n - b_n \to 0.$$

D'autre part, les deux relations suivantes sont souvent utiles :

- $\forall x > 0$, arctan $(x)+$ arctan $(1/x) = \pi/2$,

- arccos $(1-x) \sim \sqrt{2x}$ quand $x \to 0^+$.

Elles ne figurent pas explicitement au programme, mais vous devez savoir les démontrer.

6. Pour quels réels α a-t-on :
$$e^{(n+1)^\alpha} \sim e^{n^\alpha} \quad ?$$
7. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de : $\ln(\cos(x))$.
8. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de : $\dfrac{x}{e^x - 1}\cdot$
9. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de : $\exp(e^x)\cdot$
10. Équivalent en 0 de : $\dfrac{1}{\tan x} + \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{2}{x}\cdot$
11. Limite en 0 de : $(\cos x)^{\text{cotan}\ ^2 x}$.
12. Limite en $+\infty$ de $\dfrac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^x}$.
13. Limite en $+\infty$ de : $\left(\dfrac{2}{\pi}\ \text{arctan}\ x\right)^x$.
14. Équivalent en $+\infty$ de : $e^{1/x} - \dfrac{x(x+1)}{1+x^2}$.
15. Limite en $\pi/4$ de : $(\tan x)^{\tan 2x}$.
16. Soient a et b deux réels, avec $a > 0$. Équivalent en $+\infty$ de
$$\ln\left(\ln(ax+b)\right) - \ln\left(\ln x\right).$$
17. Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Équivalent en $+\infty$ de : $(\text{ch}\ x)^\alpha - (\text{sh}\ x)^\alpha$.
18. Soient u et v dans $\mathbb{R}^{+*}$, (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telles que :
$${a_n}^n \to u, \qquad {b_n}^n \to v.$$
Déterminer la limite de :
$$\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^n.$$

Les exercices ci-après concernent l'étude asymptotique d'équations à paramètre. L'existence et l'unicité des racines d'une équation s'établissent le plus souvent en étudiant des variations ; l'étude des variations permet aussi, par simple lecture du tableau, de placer un réel par rapport aux racines d'une équation, et donc d'encadrer les racines.

19. Soit :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 + x \end{array}$$

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque f^{-1} est de classe C^∞ (citer un théorème précis).

b) Donner un équivalent de $f^{-1}(x)$ quand $x \to +\infty$, puis un développement asymptotique à deux termes.

20. a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $x^n + x = 1$ a une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite ℓ à préciser.

c) Donner un équivalent de $x_n - \ell$.

21. a) Montrer que l'équation $\tan x = x$ possède, si $n \in \mathbb{N}$, une unique racine x_n dans $]-\pi/2 + n\pi,\ \pi/2 + n\pi[$.

b) Donner un équivalent simple de x_n, puis un développement asymptotique à trois termes.

3 Suites réelles et complexes

Les points essentiels sont les suivants :

- définitions de la convergence, de la divergence vers $\pm\infty$;

- théorèmes de limite monotone ;

- étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$;

- théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass et ses extensions jouent un rôle essentiel en Analyse. Il est important de maîtriser les preuves pour les suites réelles (dichotomie) et complexes (extractions successives).

22. * Trouver les z dans $\mathbb{C}$ tels que la suite $(z^n)_{n\geq 0}$ converge.

23. **Autour du théorème de Cesaro*

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Pour n dans $\mathbb{N}$, soit :

$$y_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k.$$

a) Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers le réel ℓ, il en est de même de $(y_n)_{n\geq 0}$. Que se passe-t-il si $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$?

b) Donner un exemple montrant que « la » réciproque du résultat de a) est fausse.

c) Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone et si $(y_n)_{n\geq 0}$ tend vers ℓ, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers ℓ.

d) Soient d un entier ≥ 2. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+d} = x_n.$$

Montrer que $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers un nombre réel que l'on précisera.

24. * *Théorème du point fixe attractif*
Soit f une application de classe C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans lui-même, a dans I un point fixe de f tel que :

$$|f'(a)| < 1,$$

$(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

a) Soit k dans $]|f'a)|, 1[$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne sur $I \cap [a - \alpha, a + \alpha]$.
b) Si u_0 est dans $I \cap [a-\alpha, a+\alpha]$, montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers a.
Un dessin est recommandé. On notera que le résultat est local : si u_0 est loin de a, le comportement de $(u_n)_{n\geq 0}$ peut être très différent.

25. * *Bolzano-Weierstrass dans $\overline{\mathbb{R}}$*
Soit (x_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une extractrice φ telle que :

$$x_{\varphi(n)} \to +\infty.$$

26. * *Caractérisation des suites convergentes*
a) Montrer qu'une suite complexe bornée converge si et seulement si elle n'admet qu'une seule valeur d'adhérence.
b) Montrer que cet énoncé est faux si l'on omet l'hypothèse « bornée ».

27. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle bornée telle que :

$$u_{n+1} - u_n \to 0.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{\geq 0}$ est un intervalle.
Prendre a et b deux valeurs d'adhérence avec $a < b$ et c dans $]a, b[$. Un dessin dit pourquoi c est valeur d'adhérence. Il reste à formaliser.

4 Séries

Les points essentiels du cours de première année sont les suivants :

- pour une série à termes positifs, équivalence entre la convergence et le caractère majoré de la suite des sommes partielles ;

- convergence des séries de Riemann ; convergence et somme en cas de convergence d'une série géométrique ;

- la convergence absolue implique la convergence.

28. Étudier la convergence de la série de terme général ci-après :

(a) $f\left(\frac{1}{n}\right)$ où f est une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$,

(b) $f(n)$ où f est une fraction rationnelle sans pôle réel,

(c) $\exp(-(\ln n)^\alpha)$, avec $\alpha > 0$,

(d) $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$,

(e) $\ln(\text{th}\,(\sqrt{n}/\ln n))$,

(f) $(n+1)^{1/n} - n^{1/n}$,

(g) $p_n^{-p_n}$ où p_n est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n,

(h) $\text{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi}\text{Arctan}\; n^\alpha\right)$ avec $\alpha > 0$,

(i) $\cos(a/n) + \sin(b/n) + \text{sh}(c/n) - e^a\left(1 + \dfrac{b+c}{n}\right)^n$ avec a, b, c dans $\mathbb{R}$,

29. * Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs ou nuls telle que la série de terme général u_n converge mais que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\geq 1}$ ne soit bornée pour aucune valeur de α dans $\mathbb{R}^{+*}$.

30. * On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n = o(1/n)$.

5 Fonctions de variable réelle : continuité

Les points majeurs sont les suivants :

- définition des fonctions continues, caractérisation séquentielle ;

- théorème des valeurs intermédiaires, image continue d'un segment et application à l'existence d'extrema ;

- caractérisation des fonctions continues et injectives de I dans $\mathbb{R}$ si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ (une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone) ;

- définition de l'uniforme continuité et théorème de Heine.

31. * *La plus classique des équations fonctionnelles*
Déterminer les applications continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

32. L'image d'un intervalle borné I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est-elle bornée ? L'image d'un intervalle borné I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle bornée ?

33. *Existence de points fixes*
a) Si f est une application continue de $[0,1]$ dans lui-même, montrer que f a un point fixe.
b) Une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a-t-elle nécessairement un point fixe ?
c) Soient k dans $]-1,1[$, f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) - kx$ soit bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f a un point fixe.

34. * *Existence d'un minimum global*

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) \geq f(x_0).$$

L'idée est de se ramener à un segment. Dessin conseillé.

35. Existe-t-il une application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) = -x\ ?$$

36. Soit f une application continue et surjective de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f s'annule une inifnité de fois sur $\mathbb{R}^+$.

37. Indiquer une application continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ non uniformément continue.

Dire que f est uniformément continue, c'est dire que l'on peut contrôler $[f(x) - f(y)|$ par une fonction de $|x - y|$ de limite nulle en 0. Il suffit donc, pour montrer qu'une fonction f n'est pas uniformément continue, de produire deux suites (x_n) et (y_n) telles que $(x_n - y_n)$ tende vers 0 sans que $(f(x_n) - f(y_n))$ tende vers 0. En se représentant géométriquement ce que signifie cette condition, il n'est pas difficile d'exhiber un exemple.

38. * Soit f une application uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad |f(x)| \leq Ax + B.$$

Soit $\delta > 0$ d'uniforme continuité associé à 1. En faisant un pas de δ en abscisse, on fait un pas d'au plus 1 en ordonnée. Un dessin dit alors tout.

6 Fonction de variable réelle : dérivabilité

Pour l'étude à l'ordre 1, les points essentiels sont les suivants :

- dérivabilité, interprétation en terme de développement limité à l'ordre 1 et en termes de tangente, opérations sur les fonctions dérivables ;

- condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur ;

- théorème de Rolle (qui est, avec le théorème des valeurs intermédiaires, l'outil essentiel pour produire des points d'annulation) ;

- théorème des accroissements finis, application à la variation des fonctions et au théorème de la limite de la dérivée.

- fonctions de classe C^1, définition, classe C^1 par prolongement.

Le point ci-après est essentiel.

- Il est en général impossible de contrôler f' à partir de f : une fonction peut être partout petite avec une dérivée grande en certains points. La raison en est qu'on ne peut pas dériver les inégalités.

- En revanche, on peut intégrer les inégalités et donc contrôler f à partir de f'. Dans le cas C^1, on récupère f à partir de f' et de l'égalité :

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'.$$

Le théorème des accroissements finis est en fait un théorème d'intégration. Sous la seule hypothèse « f dérivable » (qui ne permet pas d'utiliser l'intégrale), il montre que l'hypothèse

$$\forall x \in [a,b], \qquad m \leq f'(x) \leq M$$

implique la conclusion

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

En particulier, si $|f'|$ est majorée par M, alors f est M-lipschitzienne. Cinématique : en se déplaçant à vitesse au plus égale à M pendant un intervalle de temps T, on parcourt une distance majorée par MT.

39. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en x_0. On pose :

$$M(x) = \max\{f(x), g(x)\}.$$

La fonction M est-elle dérivable en x_0 ?
Faire un dessin pour deviner le résultat. Le prouver ensuite en utilisant l'expression du maximum de deux réels avec la valeur absolue.

40. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0 et nulle en 0. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k^2}{n^3}\right).$$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge, déterminer sa limite.

41. ** Contrôle des annulations de f à partir de celles de $f^{(n)}$*
Soit f une fonction n fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f^{(n)}$ s'annule en exactement p points distincts de $\mathbb{R}$. Majorer le nombre de points en lesquels f s'annule.

42. *Dérivation et caractère lipschitzien*
a) Montrer qu'une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que toute application de classe C^1 sur un segment S de $\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur S
Les deux exercices ci-après illustrent le fait qu'il est possible de contrôler f à partir de f' et non pas l'inverse. On pourra se contenter de traiter le premier sous l'hypothèse f de classe C^1.

43. Soient λ dans $\overline{\mathbb{R}}$, f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

Montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

44. Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}^+$ et telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad |f(x)| \leq Cx.$$

45. Donner un exemple de fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite en $+\infty$ mais telle que f' ne tende pas vers 0 en $+\infty$.

Les inégalités de l'exercice ci-après sont classiques et doivent être connues. Nous les retrouverons en Spéciales par des arguments de convexité, mais vous pouvez les établir dès maintenant à l'aide d'étude de fonctions.

46. * *Inégalités*

Prouver les inégalités ci-après :

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$,

— $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln x \leq x - 1$,

— $\forall x \in [0, \pi/2]$, $2x/\pi \leq \sin x \leq x$,

— *Inégalité de Young*
Soient $p \in]1, +\infty[$, q le réel tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$. Alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

7 Fonctions de variable réelle : classe C^k

Voici les principaux résultats relatifs aux fonctions de classe C^k :

- opérations, notamment formule de Leibniz ;

- théorème de classe C^k par prolongement ;

- formules de Taylor globales, c'est-à-dire avec reste intégral ou inégalité de Taylor-Lagrange ;

- formule de Taylor-Young.

Les deux types de formules ont des champs d'action bien distincts. La formule de Taylor-Young donne des renseignements locaux, c'est-à-dire valables sur un voisinage (non précisé) d'un point donné x_0. La formule avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange fournissent des informations valables sur tout un intervalle.

47. * *Une fonction C^∞ non identiquement nulle plate à tout ordre en 0*

a) Montrer que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto e^{-1/x^2}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées s'annulent en 0.

b) Donner un exemple de fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ de classe C^∞ telle que

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in]0, 1[.$$

48. *Contre-exemple à une idée naïve*
La fonction f est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = e^{-1/x^2} \sin^2(1/x), \qquad f(0) = 0.$$

Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, que f a un minimum global en 0, que f n'est monotone sur aucun intervalle $[0, \alpha], \alpha > 0$.
Les deux exercices ci-après sont des applications simples de la formule de Taylor-Young.

49. ** Les zéros d'ordre fini sont isolés*
a) Soient f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, a un point tel que $f(a) = 0$. On suppose qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Montrer il existe $h > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $[a - h, a + h] \setminus \{a\}$.
b) Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout zéro a de f, il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Si S est un segment de $\mathbb{R}$, montrer que f ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur S.

50. ** Dérivées en un point et extrema*
Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) On suppose que f a un maximum local en 0. Montrer :

$$f'(0) = 0, \qquad f''(0) \leq 0.$$

b) On suppose :

$$f'(0) = 0, \qquad f''(0) < 0.$$

Montrer que f a un maximum local en 0.

51. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose :

$$u_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot$$

Quel est le signe de $u_n(x)$? Montrer que :

$$|u_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot$$

52. Soient p dans $\mathbb{N}^*$, f une application de classe C^p de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f^{(p)}$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(x^p).$$

53. ** Inégalité de Landau*
Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}^+$, respectivement par M_0 et M_2.
Si x est dans $\mathbb{R}^+$ et h dans $\mathbb{R}^{+*}$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $f(x)$, $f(x+h)$ et des valeurs de f'' sur $[x, x + h]$ de manière à établir l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par $2\sqrt{M_0 M_2}$

8 Intégration et équations différentielles

Il est indispensable de maîtriser les points suivants :

- sommes de Riemann ;

- intégrale fonction de sa borne supérieure (dérivation) ;

- techniques de calcul usuelles : intégration par parties, changement de variable, primitives usuelles.

54. Si u et v sont deux applications de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$, dériver :

$$\Phi \ : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f.$$

55. *Comparaison somme intégrale*
Soit α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(n^\alpha).$$

On utilisera la méthode des rectangles (dessin). Cette technique de comparaison sera employée régulièrement en Spéciales.

56. Soit f une application continue et périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les primitives de f soient périodiques.

57. ** Fonctions dont les premiers moments sont nuls*
Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \qquad \int_a^b f(t)\, t^k \,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $]a, b[$.

Observer que, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, on a : $\int_a^b fP = 0$. Raisonner ensuite par l'absurde en supposant que f s'annule au plus n fois dans $]a, b[$ et, en considérant les points en lesquels f s'annule en changeant de signe, construire P dans $\mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ tel que fP soit ≥ 0 sur $[a, b]$.

58. Calculer les primitives de

$$x \mapsto e^{ax} \cos(bx).$$

Indication. Utiliser l'exponentielle complexe.

59. Calculer les primitives de Arctan sur $\mathbb{R}$.

60. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}\,.$$

61. Calculer, si $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}\,.$$

62. * *Intégrales de Wallis*
Pour n dans $\mathbb{N}$, soit :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}$, exprimer W_{n+2} en fonction de W_n.

b) Calculer W_n en fonction de n (discuter selon la parité de n).

c) Étudier la monotonie de $(W_n)_{n\geq 0}$. En déduire, en utilisant a), que

$$W_{n+1} \sim W_n.$$

d) Pour n dans $\mathbb{N}$, calculer

$$(n+1)W_nW_{n+1}.$$

e) Donner un équivalent de W_n.

63. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites $(I_n)_{n\geq 0}$ et $(J_n)_{n\geq 0}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t, \qquad J_n = n\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

64. * Soient f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, M le maximum de f sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} M.$$

65. Soit f une fonction continue par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Commencer par le cas où f est en escalier.

Le cours de première année sur les équations différentielles se réduit à deux techniques : résolution des équations linéaires d'ordre 1 avec la « variation de la constante » et des équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Les équations étudiées sont donc soit résolues au moyen de fonctions usuelles, soit ramenées à des recherches de primitives.

66. a) Si g est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, résoudre l'équation :

$$y' + y = g.$$

On donnera une expression intégrale des solutions.

b) Soit f de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f' + f$ soit bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Ce type de question se ramenant, sans le dire explicitement, à une équation différentielle, est très classique en Spéciales.

67. Trouver les fonctions f deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f''(x) - 10f'(x) + 29f(x) = 0.$$

68. Soit λ un nombre réel. Trouver les fonction f dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(\lambda - x).$$

Indication. Déterminer une « vraie » équation différentielle linéaire (d'ordre 2) satisfaite par f.

9 Polynômes et fractions rationnelles

Ce chapitre met en jeu des techniques variées, allant de l'Algèbre et de l'Arithmétique jusqu'à l'Analyse, voire la Géométrie (problèmes de localisation des racines dans le plan complexe). Les points principaux du cours de première année sont les suivants :

- l'aspect arithmétique : division euclidienne, relation de Bézout, théorème de Gauss, factorisation en produit d'irréductibles, irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$;

- la notion de multiplicité d'une racine, avec (au moins en caractéristique nulle) le lien avec la dérivation, obtenu via la formule de Taylor ;

- les relations coefficients-racines.

69. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n} + 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
70. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_n \neq 0$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P comptées avec multiplicités. Calculer ${x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2$ en fonction des a_i. Si $a_0 \neq 0$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2}$.
71. Quels sont les n de $\mathbb{N}^*$ tels que $(X^2 + X + 1)^2$ divise $X^{2n} + X^n + 1$?
72. * Montrer que les racines du polynôme complexe :

$$X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

sont de module majoré par

$$\max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}.$$

Cette localisation grossière est souvent utile.

73. ** Polynômes de Tchébycheff*

a) Montrer, si $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

b) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que $T_n + T_{n+2} = 2XT_{n+1}$.

c) Déterminer le terme de plus haut degré de T_n.

d) Déterminer les racines de T_n, en particulier montrer qu'elles sont réelles et simples.

e) Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par T_n.

74. *Polynômes interpolateurs de Lagrange*

a) * Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des éléments deux à deux distincts d'un corps K et $b_0, \ldots, b_n$ des éléments de K. Montrer qu'il existe un unique $P \in K_n[X]$ tel que
$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \qquad P(a_i) = b_i.$$
Donner une expression explicite de P.

La formule interpolatoire précédente est importante. La question ci-après en est une application simple.

b) Soient r dans $\mathbb{R}$, P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad P(k) = r^k.$$
Calculer $P(n+1)$.

75. *Polynômes de Hilbert*

La suite $(H_n)_{n\geq 0}$ des polynômes de Hilbert est définie par :
$$H_0 = 1 \; ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

a) Pour n dans $\mathbb{N}$ et j dans $\mathbb{Z}$, calculer $H_n(j)$. On discutera selon la valeur de j et utilisera des coefficients binomiaux.

b) Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si P est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des $H_n, n \in \mathbb{N}$.

76. *Dérivée d'un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

a) * Montrer que si P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

b) * Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$. Que dire des éventuelles racines multiples de P' ?

Il existe de nombreuses variations sur ce thème. Voici deux exemples.

c) On suppose P simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout a dans $\mathbb{C}$, $P - a$ n'a pas de racine complexe de multiplicité ≥ 3.

d) On suppose P simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

77. *Somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[X]$*

a) Montrer que tout trinôme du second degré unitaire irréductible de $\mathbb{R}[X]$ est somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que si P et Q sont somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$, il en est de même de PQ.

c) Montrer qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ est somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$.

78. Soient n un entier ≥ 2, a et b deux réels. Montrer que $X^n + aX + b$ a au plus trois racines réelles distinctes.

Les exercices ci-après concernent les fractions rationnelles. Il faut savoir déterminer rapidement le coefficient d'un pôle simple.

79. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)}, \qquad \frac{1}{X^n - 1}.$$

80. *Dérivée logarithmique*
* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Décomposer en éléments simples la fraction P'/P.

Ce résultat est très souvent utile : si P est factorisé, l'expression de P' obtenue par dérivation est lourde alors que celle de P'/P est simple. Pour z non racine de P, l'équation $P'(z) = 0$ s'écrit donc plus clairement sous la forme $(P'/P)(z) = 0$. Application dans les deux exercices suivants.

81. * *Théorème de Gauss-Lucas*
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que toute racine de P' est barycentre à coefficients positifs de l'ensemble des racines de P.

82. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de P'/P et montrer que $P' - aP$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, pour tout réel a.

10 Algèbre linéaire : point de vue géométrique

En algèbre linéaire, on peut distinguer un peu brutalement deux points de vue qui se complètent et s'enrichissent. Le point de vue géométrique privilégie l'étude intrinsèque des objets : sous-espaces, supplémentarité, applications linéaires ... Le point de vue numérique repose sur le calcul dans des bases, l'utilisation des matrices et des déterminants. Pour être véritablement efficace, il est nécessaire de maîtriser les deux aspects.

L'algèbre linéaire « géométrique » comporte, outre les définitions relatives aux espaces, sous-espaces et applications linéaires, les points suivants :

- familles libres, liées, génératrices, bases ;

- espaces de dimension finie, définition de la dimension, caractérisations des bases d'un espace de dimension n, formule de Grassmann (dimension de $F + G$) ;

- rang d'une application linéaire, théorème du rang.

83. *Quelques familles libres de fonctions*
a) Montrer que les fonctions :

$$f_\alpha : x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

forment une famille libre de l'espace des fonctions de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que les fonctions :

$$f_n : x \mapsto \sin(x^n), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

forment une famille libre de l'espace des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

c) Montrer que les fonctions :

$$f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

forment une famille libre de l'espace des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

84. ** Condition suffisante d'intersection non nulle*
Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels tels que :

$$\dim(F) + \dim(G) > \dim(E).$$

Montrer :

$$F \cap G \neq \{0\}.$$

85. ** Dimension d'une intersection finie d'hyperplans*
Soient E un K-espace de dimension n, $H_1, \ldots, H_m$ des hyperplans de E (avec $m < n$). Montrer :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geq n - m.$$

86. *Base échelonnée*
a) Soit n dans $\mathbb{N}$. Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de polynômes de même degré.

b) Soit V un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que V contient une base dont tous les polynômes sont de degrés distincts, puis une base dont tous les polynômes ont même degré.

Les quatre exercices suivants proposent des calculs de dimension. Voici quelques méthodes pour calculer la dimension d'un espace vectoriel V :

- trouver une base de V ;

- exhiber un isomorphisme de V sur un espace de dimension connue ;

- plus généralement, écrire V comme image d'une application linéaire dont on connaît le noyau et utiliser le théorème du rang ;

- écrire V comme noyau d'une application linéaire dont on connaît l'image et utiliser le théorème du rang ;

- écrire V comme intersection d'hyperplans indépendants.

Les trois premières méthodes reviennent à paramétrer linéairement V. Les deux dernières reposent à l'inverse sur une description de V par des équations linéaires.

87. ** Changement du corps de base*
Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

88. ** Suites récurrentes*
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. Trouver la dimension de l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i}.$$

89. ** Polynômes s'annulant sur un ensemble donné*

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$ avec $n \geq p$, $a_1 < \cdots < a_p$ des réels. Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes s'annulant en $a_1, \ldots, a_p$?

90. *Matrices hermitiennes*

Montrer que l'espace des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que :

$$^t\overline{M} = M$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel et trouver sa dimension.

91. *Splines cubiques*

Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ une subdivision de $[0, 1]$. Déterminer la dimension de l'espace des fonctions f de classe C^2 de $[0, 1]$ dont la restriction à $[a_k, a_{k+1}]$ est, pour tout k de $\{0, \ldots, n-1\}$, polynomiale de degré ≤ 3.

92. ** Propriétés élémentaires du rang*

Soient u et v deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel de dimension finie. Montrer :

$$\text{rg } (u \circ v) \leq \min\{\text{rg } u, \text{rg } v\} \qquad \text{et} \qquad \text{rg } (u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v.$$

93. *Noyau et image imposés*

Soient E un K-espace de dimension finie, E_1 et E_2 deux sous-espaces de E. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur E_1 et E_2 pour qu'il existe f dans $\mathcal{L}(E)$ de noyau E_1 et d'image E_2.

94. ** Rang d'une composée*

Soient E, F, G trois K-espaces de dimension finie, f dans $\mathcal{L}(E, F)$ et g dans $\mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

$$\text{rg } (g \circ f) = \text{rg } (f) - \dim(\text{Ker } (g) \cap \text{Im } (f)).$$

Cette formule, que l'on obtient facilement en appliquant le théorème du rang à la restriction $\tilde{g}$ de g à Im (f), est souvent utile.

95. ** Caractérisation des homothéties*

Soit f un endomorphisme du K-espace vectoriel E tel que, pour tout x de E, $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

96. ** Indice de nilpotence*

Soient f dans $\mathcal{L}(E)$, x dans E tel que :

$$f^{(p-1)}(x) \neq 0, \qquad f^{(p)}(x) = 0.$$

Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{(p-1)}(x))$ est libre.

Que peut-on en déduire sur l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent d'un K-espace vectoriel de dimension n ?

97. * *Noyaux et images itérés*
Soient E un K-espace de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que

$$\text{Ker } (u^m) = \text{Ker } (u^{m+1}) \quad \Rightarrow \quad \forall k \geq m, \quad \text{Ker } (u^k) = \text{Ker } (u^m).$$

b) Soit p le plus petit m de $\mathbb{N}$ tel que :

$$\text{Ker } (u^m) = \text{Ker } (u^{m+1}).$$

Montrer que :

$$\text{Ker } (u^p) \oplus \text{Im } (u^p) = E.$$

11 Matrices

Le calcul matriciel est un outil très puissant. Il est souvent utilisé pour l'étude des applications linéaires, mais il a une existence propre. Les points essentiels du programme de première année sont les suivants :

- calcul matriciel, notamment produit de matrices élémentaires ;

- matrice d'une application linéaire dans un couple de bases ;

- application linéaire canoniquement associée à une matrice : définition, interprétation des vecteurs colonnes comme famille génératrice de l'image, des vecteurs lignes comme systèmes d'équations du noyau ;

- matrices équivalentes, interprétation géométrique, classification des matrices équivalentes via le rang ;

- opérations élémentaires : description, interprétation comme produit matriciel, conservation du rang, effet sur le déterminant ;

- matrices semblables, interprétation géométrique, trace ;

- déterminants.

98. * *Application du calcul sur les matrices élémentaires*
a) Rappeler le calcul du produit de deux matrices $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$.
b) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ qui commutent à toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(K)$?
c) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$ telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2, \qquad f(AB) = f(BA).$$

Montrer que f est proportionnelle à la trace.

99. * *Interpolation de Lagrange et Vandermonde*
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des scalaires deux à deux distincts.
a) Montrer que l'application linéaire :

$$P \in K_{n-1}[X] \longmapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n)) \in K^n$$

est un isomorphisme de $K_{n-1}[X]$ sur K^n.
b) Relier ce résultat à l'interpolation de Lagrange.
c) En déduire également que la matrice de Vandermonde associée au n-uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible (sans utiliser les déterminants).

100. * *Un calcul de dimension*

Soient F et G deux sous-espaces du K-espace vectoriel de dimension finie E. Quelle est la dimension du sous-espace $A_{F,G}$ de $\mathcal{L}(E)$ constitué des u de $\mathcal{L}(E)$ tels que $u(F) \subset G$?

On pourra utiliser la représentation matricielle dans un couple de bases bien choisies. Il est également possible de raisonner géométriquement, sans aucun recours aux matrices.

101. * *L'application* $u \mapsto b \circ u \circ a$

Soient E un K-espace de dimension finie, a et b deux endomorphismes de E de rangs respectifs r et s, Φ l'application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \qquad \Phi(u) = b \circ u \circ a.$$

a) Vérifier que Φ est linéaire. En utilisant l'exercice précédent, calculer la dimension du noyau de Φ.

On interprètera géométriquement la relation $b \circ u \circ a = 0$.

b) Quel est le rang de Φ ?

c) Montrer que l'image de Φ est l'ensemble des endomorphismes de E dont le noyau contient celui de a et dont l'image est contenue dans celle de b.

On utilisera la question précédente et un argument d'inclusion et d'égalité des dimensions.

102. * *Similitude et équivalence*

Soit $n \geq 2$.

a) Indiquer deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ équivalentes mais non semblables.

b) Quelles sont les M de $\mathcal{M}_n(K)$ équivalentes à une matrice nilpotente ?

103. * *Matrices à diagonale strictement dominante*

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad |m_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} |m_{i,j}|.$$

Montrer que M est inversible.

On montrera que le noyau de M est nul. Pour ce faire, on prendra X dans le noyau, on écrira les équations scalaires traduisant $MX = 0$ et on choisira une composante de X de module maximum.

104. * *Génération du groupe spécial linéaire*

Soit $\mathrm{SL}_n(K)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ de déterminant 1 ; $\mathrm{SL}_n(K)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SL}_n(K)$ est produit de matrices de transvection.

Puisque l'inverse d'une matrice de transvection est une matrice de transvection, il s'agit, M étant donnée dans $SL_n(K)$, de montrer qu'en multipliant M à droite et à gauche par des matrices de transvection, on peut obtenir l'identité. Or, la multiplication à gauche (resp. droite) par une matrice de transvection s'interprète simplement au niveau des lignes (resp. colonnes).

Les six exercices suivants sont consacrés à la similitude. Pour montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont semblables, on raisonne en général géométriquement, ce qui signifie que l'on introduit l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A et que l'on trouve une base de K^n dans laquelle cet endomorphisme a pour matrice B. Les exercices 8 à 13 sont des illustrations simples de ce principe. Certains d'entre eux utilisent des résultats présentés dans les exercices du chapitre précédent.

Attention, les opérations élémentaires ne transforment pas une matrice en matrice semblable.

105. * Soit M dans $\mathcal{M}_n(K) \setminus KI_n$. Montrer qu'il existe une matrice semblable à M dont la première colonne soit

$$C = {}^t(0, 1, 0, \dots, 0).$$

106. *Similitude avec J_r*
Montrer qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$ est semblable à la matrice :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si et seulement si M est de rang r et vérifie $M^2 = M$.

107. Soient E un K-espace de dimension n, u dans $\mathcal{L}(E)$ de rang r. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- le noyau et l'image de u sont en somme directe ;

- il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec A dans $\mathrm{GL}_r(K)$.

108. **Nilpotents d'indice maximal*
Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ est semblable à la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

si et seulement si M est nilpotente d'indice n.

109. *Nilpotents*
Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.
On raisonnera par récurrence. Pour amorcer la construction, on notera que le noyau d'un endomorphisme nilpotent est non nul.

110. Montrer que la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est semblable à la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $0, 0, \dots, 0, n$.

111. a) Montrer que si A et H sont dans $\mathcal{M}_n(K)$ avec H de rang 1, alors l'application :

$$t \in K \mapsto \det\ (A + tH)$$

est affine.

b) En déduire le déterminant d'une matrice A dont tous les coefficients d'indice (i, j) avec $i < j$ (resp. $i > j$) valent a (resp. b) avec $a \neq b$ et dont la diagonale est quelconque.

On pourra utiliser la matrice H dont tous les coefficients valent 1.

112. * *Vandermonde*

Calculer le déterminant de Vandermonde.

12 Espaces euclidiens

Les espaces euclidiens sont une généralisation de grande portée de la géométrie métrique élémentaire. Leur force est de permettre l'emploi de l'intuition géométrique dans un grand nombre de situations. Les points essentiels du cours de première année sont les suivants :

- produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, norme associée à un produit scalaire, cas d'égalité de l'inégalité triangulaire ;

- orthogonalité, théorème de Pythagore, algorithme de Schmidt ;

- familles orthonormées, existence des bases orthonormées en dimension finie, calculs en base orthonormée (coordonnées, produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme) ;

- théorème du supplémentaire orthogonal (pour un sous-espace de dimension finie) ;

- caractérisation métrique du projeté orthogonal de x sur V (comme unique point de V réalisant la distance de x au sous-espace V) ; expression du projeté orthogonal en base orthonormée ;

- isométries, matrices orthogonales ;

- isométries en dimension 2.

Incidemment, une remarque terminologique : un projecteur orthogonal n'est pas un endomorphisme orthogonal.

113. Soient E un espace euclidien, S sa sphère unité, p un entier ≥ 2, f l'application de S^p dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (v_1, \ldots, v_p) \in S^p, \qquad f(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \langle v_i, v_j \rangle .$$

En considérant $\| \sum_{i=1}^{p} v_i \|^2$, déterminer le maximum et le minimum de f sur S^p.

114. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Déterminer le maximum de

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ décrit l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 1.$$

115. *Contre-exemple au théorème du supplémentaire orthogonal*
L'espace E des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ est muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \qquad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} fg.$$

Déterminer l'orthogonal du sous-espace F constitué des fonctions dont la restriction à $[0, 1]$ est nulle. Vérifier que :

$$F \oplus F^{\perp} \neq E.$$

116. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \qquad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} PQ.$$

Calculer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ ainsi que la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

117. ** Polynômes orthogonaux*
Soit w une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.
a) Expliquer pourquoi il existe une unique suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes vérifiant les conditions suivantes :

- pour tout n de $\mathbb{N}$, P_n est unitaire de degré n ;

- pour tous m, n de $\mathbb{N}$ tels que $m \neq n$, on a :

$$\int_0^1 P_n P_m w = 0.$$

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n a n zéros simples dans $]0, 1[$.
On observera que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on se reportera à un exercice d'intégration.
c) On suppose $n \geq 2$. Montrer que $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$. En déduire qu'existent a_n et b_n dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}.$$

118. *Matrice d'un projecteur orthogonal*
L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Donner la matrice canonique du projecteur orthogonal sur la droite engendrée par le vecteur : $v = (1, 1, 1)$.
On déterminera les coordonnées (x', y', z') du projeté d'un vecteur de coordonnées (x, y, z).

119. ** Une caractérisation des projecteurs orthogonaux*
Soient E un espace euclidien, p dans $\mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Un sens est évident. Pour l'autre, un dessin peut aider.

120. *Distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ pour la norme de convergence en moyenne quadratique sur* $[0,1]$
Soient $n \geq 1$ et, pour P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))^2 \, \mathrm{d}t.$$

a) Montrer qu'il existe un unique P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad I(Q) \geq I(P).$$

On écrit $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ et on pose :

$$F = \frac{1}{X+n+1} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{X+j+1}\,.$$

b) Calculer $F(i)$ si $0 \leq i \leq n-1$; en déduire F et les a_j.

c) Montrer que $I(P) = F(n)$ et calculer cette quantité.

121. *Familles obtusangles*
Montrer que si E est un espace euclidien de dimension n et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, p\}^2, \qquad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle < 0,$$

alors :

$$p \leq n+1.$$

122. Déterminer les M de $\mathcal{O}_n(\mathbb{Z})$ (c'est-à-dire les matrices orthogonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.)
On rappelle que les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée, donc sont en particulier unitaires.

123. Déterminer le maximum de la fonction Tr sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et dire en quels points ce maximum est atteint.

124. *Restriction cristallographique plane*
Soient P un plan euclidien orienté, θ un réel, r la rotation d'angle θ dans P. On suppose que r préserve un réseau, ce qui signifie qu'existe une base (u,v) du plan tel que, si

$$\Gamma = \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v,$$

on ait :

$$r(\Gamma) \subset \Gamma.$$

Montrer :

$$\cos(\theta) \in \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}.$$

On connaît la forme de la matrice de r dans une base orthonormée directe de P. Et l'hypothèse montre que la matrice de r dans (u,v) appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Utiliser alors une quantité se conservant par similitude.

13 Probabilités

Ce chapitre a pour objectif la mise en place les probabilités sur des univers finis. Le but est d'acquérir, dans ce cadre restreint, une bonne maîtrise de la notion de variable aléatoire. Les points essentiels du cours sont les suivants :

- axiomatique des probabilités sur des univers finis ;

- probabilités conditionnelles et formules de Bayes ;

- définition et loi d'une variable aléatoire ;

- variables de Bernoulli, variables binomiales ;

- couples et marges ;

- variables aléatoires indépendantes, mutuellement indépendantes ;

- espérance d'une variable aléatoire, linéarité et inégalité de Markov ;

- variance et covariance, expression de la variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables deux à deux indépendantes.

Les exercices 126 à 131 nécessitent une modélisation simple.

125. a) Que dire de deux événements indépendants A et B tels que :

$$A \subset B\,?$$

b) Que dire de deux événements indépendants et incompatibles ?

c) Les événements $A_1, \ldots, A_k$ sont mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_1, \ldots, p_k$. Calculer la probabilité de

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

126. Un joueur de tennis A en affronte deux autres, B et C, C étant meilleur que B. Il gagne s'il gagne deux matchs consécutifs. Quel est l'ordre qui maximise sa chance de gagner entre BCB et CBC ?

127. *Tiroirs*
Un meuble de n tiroirs a la probabilité p de contenir un vêtement. On ouvre les $n-1$ premiers tiroirs sans trouver le vêtement. Quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier tiroir ?

128. *Filles et garçons*
Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$ avec $m < n$.

a) Quelle est la probabilité qu'un couple ayant n enfants dont les m premiers sont des garçons n'ait que des garçons ?

b) Quelle est la probabilité qu'un couple ayant n enfants dont au moins m garçons n'ait que des garçons ?

129. *Loi de succession de Laplace*
Donnons nous $m+1$ urnes $U_0, \ldots, U_m$ et supposons que, pour tout k, U_k contient k boules bleues et $m-k$ boules rouges. Choisissons une des urnes et effectuons y n tirages avec remise.

a) Quelle est la probabilité, sachant que les n tirages ont donné des boules bleues, qu'il en soit de même du $(n+1)$-ième ?

b) Déterminer la limite de la probabilité précédente lorsque m tend vers $+\infty$.

Cet exercice est une version discrète d'un argument utilisé par Laplace pour calculer la probabilité qu'« un événement qui s'est produit n fois se reproduise ».

130. *Urne de Polya*

On se donne b, r, c des éléments de $\mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges. On tire une boule que l'on remet dans l'urne en ajoutant c boules de la même couleur. On répète cette opération. Notons A_n l'événement « le n-ième tirage amène une boule blanche ». Déterminer $P(A_n)$.

131. * *Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans* $\{0, \ldots, n\}$

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$. Montrer

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k).$$

132. * *Somme de deux variables binomiales indépendantes*

Soit p dans $]0, 1[$, n et n' dans $\mathbb{N}$, X et X' deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$X \sim \mathcal{B}(n, p), \qquad X' \sim \mathcal{B}(n', p).$$

Démontrer par deux méthodes différentes que

$$X + X' \sim \mathcal{B}(n + n', p).$$

133. * *Valeurs de probabilité maximale pour la loi binomiale*

a) Soient p dans $]0, 1[$, n dans $\mathbb{N}^*$, X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Pour k dans $\{0, \ldots, n-1\}$, comparer $P(X = k+1)$ et $P(X = k)$. En déduire le maximum de

$$\{P(X = k),\ 0 \leq k \leq n\}.$$

b) Soient k et n dans $\mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant respectivement la loi binomiale $\mathcal{B}(kn, 1/k)$ et la loi binomiale $\mathcal{B}(k(n+1), 1/k)$. Comparer $P(X \geq n)$ et $P(Y \geq n+1)$.

134. *Marges*

Soient $E = \{0, 1, 2\}$, X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E telles que la loi de (X, Y) charge chaque couple de E^2. Construire deux variables aléatoires à valeurs dans E, X' et Y' telles que

$$X \sim X', \quad Y \sim Y', \quad X + Y \sim X' + Y'$$

mais que (X, Y) n'ait pas la même loi que (X', Y').

135. *Déterminant aléatoire*

Soit $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires centrées réduites mutuellement indépendantes.

a) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire D, égale au déterminant de la matrice $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

b) Si $A > 0$, montrer que

$$P(|D| \geq A\sqrt{n!}) \leq \frac{1}{A^2}.$$

136. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires ayant toutes pour variance σ^2 et telle que tous les couples (X_i, X_j), $i \neq j$, aient pour covariance C. Montrer que

$$C \geq -\frac{\sigma^2}{n-1},$$

avec égalité si et seulement si $X_1 + \cdots + X_n$ est déterministe.

137. * *Majoration de la variance*

Soient a, b, m des réels avec $a \leq m \leq b$.

a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance m. Montrer

$$V(X) \leq (m-a)\,(b-m) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

On pourra considérer l'espérance de $(X-a)(b-X)$.

b) Construire une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$, d'espérance m, telle que

$$V(X) = (m-a)(b-m).$$

138. *Probabilités sur le groupe symétrique*

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est muni de la probabilité uniforme.

a) Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de points fixes d'une permutation. Calculer l'espérance et la variance de X.

Pour i *dans* $\{1, \ldots, n\}$, *on pourra noter* X_i *la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement « i est point fixe de σ » ; et observer que l'on a* $X = X_1 + \cdots + X_n$.

b) Soit Y la variable aléatoire donnant la longueur du cycle contenant 1 dans la décomposition canonique d'une permutation. Quelle est la loi de Y ?

c) Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de cycles dans la décomposition canonique d'une permutation. Si t est un nombre réel, montrer

$$E(t^Z) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(t+k).$$

En déduire l'espérance et la variance de Z.